

1. Estudie la continuidad de la función  $f$  definida por

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}.$$

En caso de discontinuidades especifique el carácter de éstas (evitables o inevitables).

### **RESPUESTA**

Primero que nada notamos que la función es par, por lo tanto basta estudiarla solamente para  $x \geq 0$ .

Consideramos los siguientes casos:

- $0 \leq x < 1$  : En dicho caso  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0$  y por tanto,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{1 + 0} = 0.$$

- $x = 1$  : En este caso  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$  y por tanto y por tanto,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

- $x > 1$  : En este caso  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \infty$  y por tanto

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + (1/x^{2n})} = \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

Por lo tanto, considerando la paridad de la función,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

y notamos que  $f$  es discontinua solamente en los puntos  $x = \pm 1$  y que dichas discontinuidades son inevitables (son de salto y por tanto no pueden ser removidas) ■

2. Calcule la derivada de  $f(x) = |x^2 - 1| - 2|x - 1|$  en todos los puntos en que ella exista ( y exhiba los puntos en que no existe, de haberlos).

### RESPUESTA

Notamos que

$$f(x) = |x - 1| |x + 1| - 2|x - 1| = |x - 1| (|x + 1| - 2).$$

Por tanto, por la definición de valor absoluto,

$$f(x) = \begin{cases} -(x - 1) (-(x + 1) - 2) & \text{si } x < -1 \\ -(x - 1) ((x + 1) - 2) & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ (x - 1) ((x + 1) - 2) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Simplificando,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + 2x - 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Por tanto,  $f$  es derivable en los intervalos  $] -\infty, -1[$ ,  $] -1, 1[$  y  $] 1, \infty[$  y, por álgebra de derivadas,

$$x < -1 \Rightarrow f'(x) = 2x + 2$$

$$-1 < x < 1 \Rightarrow f'(x) = -2x + 2$$

$$x > 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$$

Falta por estudiarse la diferenciabilidad en los puntos  $x = -1$  y  $x = 1$ .

Como  $f$  es continua en todo  $\mathbb{R}$  tenemos que  $f$  es derivable en un punto  $x_0$  si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

(y dicho valor es  $f'(x_0)$ ). Como,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x + 2) = 0 \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-2x + 2) = 4$$

tenemos que  $f$  **no es derivable en**  $x = -1$ . Por otra parte,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x + 2) = 0 \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 2) = 0,$$

lo cual implica que  $f$  **es derivable en**  $x = 1$  y allí,  $f'(1) = 0$  ■

3. Sea  $f(x) = (x+1)^3(x-1)^2$ .

- a) Encuentre los intervalos en los que  $f$  es creciente y aquellos en los que es decreciente.
- b) Encuentre los intervalos en los que  $f$  es cóncava hacia arriba y aquellos en los que es cóncava hacia abajo.

### RESPUESTA

- a) Como  $f$  es derivable en todo  $\mathbb{R}$  tenemos que  $f$  es creciente (*decreciente*) en el intervalo  $I$  si y sólo si  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ )  $\forall x \in I$ .

Ahora bien,

$$f'(x) = 3(x+1)^2(x-1)^2 + 2(x+1)^3(x-1) = (x+1)^2(x-1)(5x-1).$$

Por lo tanto,

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{5} \text{ o } x > 1.$$

Luego,  $f$  es creciente en  $] -\infty, 1/5[ \cup ] 1, \infty[$  y es decreciente en  $] 1/5, 1[$  ■

- b) Como  $f''$  existe en todo  $\mathbb{R}$  tenemos que  $f$  es cóncava hacia arriba (*abajo*) en el intervalo  $I$  si y sólo si  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ )  $\forall x \in I$ .

Tenemos que

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx} ((x+1)^2(5x^2-6x+1)) \\ &= 2(x+1)(5x^2-6x+1) + (x+1)^2(10x-6) \\ &= 2(x+1)((5x^2-6x+1) + (5x^2+2x-3)) \\ &= 4(x+1)(5x^2-2x-1) \end{aligned}$$

Como el polinomio cuadrático  $5x^2-2x-1$  tiene raíces  $(1 \pm \sqrt{6})/5$  tenemos que

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1-\sqrt{6}}{5} \text{ o } x > \frac{1+\sqrt{6}}{5}.$$

Luego,  $f$  es cóncava hacia arriba en  $] -1, (1-\sqrt{6})/5[ \cup ] (1+\sqrt{6})/5, \infty[$

y es cóncava hacia abajo en  $] -\infty, -1[ \cup ] (1-\sqrt{6})/5, (1+\sqrt{6})/5[$  ■

4. Hallar el área del rectángulo más grande con base inferior en el eje  $X$  y vértices superiores en la parábola  $y = 27 - x^2$ .

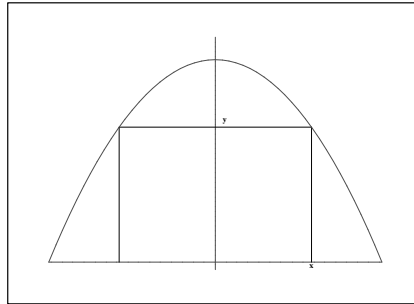
**RESPUESTA**

Sean  $x, y$  las coordenadas del vértice que está en el primer cuadrante.

Los cuatro vértices son, pues,

$$(x, 0) \quad (x, y) \quad (-x, y) \quad (-x, 0)$$

y el área del rectángulo es  $2xy$ .



Pero, como  $(x, y)$  está sobre la parábola,  $y = 27 - x^2$  y por tanto el área, expresada sólo en función de  $x$  es  $2x(27 - x^2)$ .

Debemos pues maximizar la función  $f(x) = 2x(27 - x^2)$  para  $0 \leq x \leq \sqrt{27}$ .

Su derivada es

$$f'(x) = 2(27 - 3x^2) = 6(9 - x^2),$$

la cual es negativa para  $0 \leq x \leq 3$  y positiva para  $3 \leq x \leq \sqrt{27}$ .

Por tanto, en el intervalo bajo consideración,  $f$  alcanza su valor mínimo cuando  $x = 3$  y por tanto el área mínima es

$$f(3) = 2 \cdot 3 \cdot (27 - 3^2) = 108 \quad \blacksquare$$

5. Calcule los siguientes límites (puede usar cualquiera de las técnicas vistas en clase):

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x^3} \right)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{1/x^2}.$

### RESPUESTA

a) Restando obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3},$$

el cual es del tipo  $0/0$ .

Aplicando la Regla de L'Hopital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{6},$$

ya que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

(lo cual se puede usar directamente como límite notable u obtenerlo usando nuevamente la regla de L'Hopital).

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x^3} \right) = \frac{1}{6} \quad \blacksquare$$

(Nota : También se puede usar la expansión de Taylor de  $\sin(x)$  en torno a  $x = 0$ .)

b) Tenemos que

$$\begin{aligned} (\cos(2x))^{1/x^2} &= e^{\frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}} \\ &\Downarrow \\ \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{1/x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}}. \end{aligned}$$

El límite del tipo  $0/0$ . Luego, aplicando la Regla de L'Hopital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin(2x)/\cos(2x)}{2x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(2x)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = -2.$$

Por lo tanto,  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{1/x^2} = e^{-2} \quad \blacksquare$

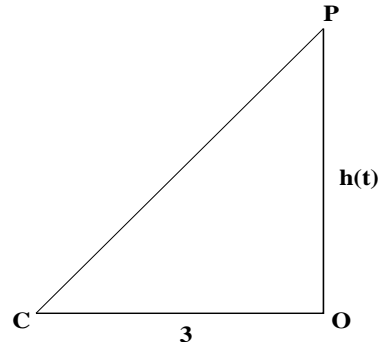
6. Una cámara sigue el lanzamiento de un cohete espacial, situada en el suelo, a 3 Km del punto de lanzamiento. Cuando el cohete ha subido 4 Km y viaja a 300 metros por segundo, ¿con qué rapidez varía el ángulo de la cámara (medido respecto de la horizontal)?

### RESPUESTA

Sea  $O$  la posición desde la cual se lanza el cohete y  $C$  la de la cámara.

Después de  $t$  segundos el cohete se encuentra en la posición  $P$  habiendo recorrido una distancia de  $h(t)$  Km.

Sea  $\theta = \angle OCP$  (medido en radianes).



Entonces  $\theta = \theta(t)$  y en todo instante  $t$  se verifica que

$$\tan(\theta(t)) = \frac{h(t)}{3}.$$

Derivando obtenemos

$$\sec^2(\theta(t)) \frac{d\theta}{dt} = \frac{h'(t)}{3}.$$

Cuando  $h(t) = 4$  Km se tiene que  $CP = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$  y por lo tanto  $\sec^2(t) = (5/3)^2 = 25/9$ .

También, por hipótesis, en ese momento  $h'(t) = 0,3$  Km/seg y por tanto, en ese instante,

$$\frac{25}{9} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{9}{250} \text{ rad/seg} \quad \blacksquare$$